Demi-plans, convexité et polygones

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

Septembre-Octobre 2000

Résumé

Cet article contient des remarques sur les polygones croisés et le partage du plan par une droite. Après une introduction sur les parallélogrammes en cinquième et un rappel concernant des propriétés de convexité des demi-plans, il propose deux activités géométriques. La première met en jeu les pieds des bissectrices d'un triangle. La seconde propose une réflexion sur les diverses façons d'imaginer un polygone et sur la conséquence de ces définitions dans la recherche des isométries planes laissant un polygone globalement invariant. Ces deux activités peuvent, par exemple, être exploitées dans un TD de préparation au CAPES.

1 Au sujet d'une caractérisation d'un parallélogramme

Lorsque j'enseignais en cinquième de Collège, je restais perplexe devant l'une des caractérisations d'un parallélogramme proposée par le manuel. Si les deux premières caractérisations ne posaient pas de problème :

(C1) Si un quadrilatère possède ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.

(C2) Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Il n'en allait pas de même de la dernière :

(C3) Un quadrilatère non croisé $ABCD$ possédant deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme.

Dans le meilleur des cas, l'énoncé précisait que le quadrilatère ne devait pas être croisé, mais sans expliquer vraiment ce que cela signifiait. Et parfois des exercices résolus entretenaient la confusion en passant sous silence le fait que le quadrilatère que l'on observait sur la figure n'était pas croisé. En un mot, cette caractérisation était si visible, si perceptible sur la figure, qu'il fallait surtout ne pas la remettre en question et ne pas soulever de problème inutile.

Mais que devais-je faire dans ma classe ? Les élèves avaient déjà compris l'importance de l'ordre d'énumération des sommets d'un quadrilatère dans des activités simples (par exemple, en traçant

[0] [ceaa0009] v1.01 Article paru dans la revue APMEP **430**, 2000, pp. 630-642.

quatre points $ABCD$ puis en coloriant différemment les quadrilatères $ABCD$, $ACBD$, etc). Je devais parler de **(C3)**, mais sans occulter le cas du quadrilatère croisé. Je décidais de proposer l'exercice de construction suivant identique à ceux qui permettaient aux élèves de « voir » et de « justifier » par le dessin les résultats **(C1)** et **(C2)**.

> **Exercice** — On se donne trois points A, B et C non alignés. Construire un quadrilatère $ABCD$ tel que $AB = CD$ et que la droite (AB) soit parallèle à (CD).

La FIG. 1 montre les deux quadrilatères possibles. L'un est croisé et n'est pas un parallélogramme.

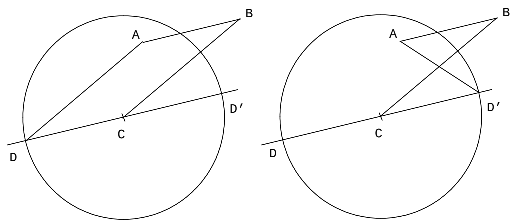


Fig. 1

Pour un élève de cinquième, tout est désormais clair : la caractérisation **(C3)** est justifiée et « non croisé » signifie que deux côtés non consécutifs ne se coupent pas.

Rappelons qu'un quadrilatère $ABCD$ est dit convexe si deux sommets consécutifs quelconques appartiennent toujours à un même demi-plan de frontière la droite joignant les deux autres sommets. Avec cette définition, un quadrilatère croisé n'est pas convexe, et la réciproque est fausse puisque le « fer de flèche » de la FIG. 8 n'est pas convexe sans être croisé. Cependant :

> **Lemme** — Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que (AB) soit parallèle à (CD). Alors :
> 1) $ABCD$ est croisé si et seulement si il n'est pas convexe.
> 2) $ABCD$ est convexe si et seulement si les points A et D appartiennent au même demi-plan de frontière (BC).

Preuve du Lemme — 1) Montrons que la condition est suffisante. Si le quadrilatère $ABCD$ n'est pas convexe, on peut supposer, sans perte de généralité, que A et D ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (BC), et donc que le segment $[AD]$ coupe la droite (BC) en un point I. Comme (AB) est parallèle à (CD), le Théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} < 0$$

d'où $I \in [BC]$. Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ se coupent ainsi en I.

2) Il suffit de vérifier que si A et D appartiennent au même demi-plan de frontière (BC), alors B et C appartiennent au même demi-plan de frontière (AD). Si $(AD) \,//\, (BC)$, alors $ABCD$ est un parallélogramme et c'est un quadrilatère convexe. Si (AD) coupe (BC) en I, le Théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} > 0$$

d'où $I \notin [BC]$, et cela permet de conclure. ■

Ce Lemme montre que non croisé est synonyme de convexe à partir du moment où l'on suppose que le quadrilatère $ABCD$ vérifie $(AB)\,//\,(CD)$. Il permet aussi de ré-écrire **(C3)** de la façon plus explicite suivante :

(C3') Un quadrilatère $ABCD$ vérifiant $AB = CD$, $(AB)\,//\,(CD)$ et tel que les points A et D appartiennent au même demi-plan de frontière (BC), est un parallélogramme.

Bien entendu je disais clairement que tout élève pouvait utiliser la caractérisation **(C3)** en se contentant de rappeler, sans démonstration, que le quadrilatère qu'il considérait n'était pas croisé, et nous savions pertinemment que les caractérisations **(C1)** et **(C2)** offraient l'avantage de ne rien faire admettre.

De manière heuristique, la caractérisation **(C3')** s'explique dès que l'on dispose de la notion de vecteur et de la caractérisation :

(C4) Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Comme un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la donnée d'une distance AB, d'une direction (celle de la droite (AB)) et d'un sens (de A vers B), on s'aperçoit que **(C3')** est l'exacte transcription de **(C4)**. Mais comprendre le résultat ne signifie pas qu'on l'a démontré, et je ne peux pas faire l'économie de la preuve suivante.

Preuve rigoureuse de (C3') — Comme $A \notin (BC)$, on peut introduire le demi-plan ouvert $\mathcal{P}_A$ de frontière (BC) et contenant A. Le segment $[DD']$ coupe la frontière en C de sorte que D et D' appartiennent à des demi-plans ouverts différents de frontière (BC). Supposons que $D \in \mathcal{P}_A$ et $D' \notin \mathcal{P}_A$. L'assertion 3) du Théorème 3 montre, en particulier, qu'un parallélogramme est un quadrilatère convexe. Comme $D' \notin \mathcal{P}_A$, $ABCD'$ ne sera pas convexe et ne sera donc pas un parallélogramme.

Montrons maintenant que $ABCD$ est un parallélogramme. Menons par A la parallèle à (BC) qui coupe (CD) (puisque (AB) et (CD) sont parallèles) en D''. Le quadrilatère $ABCD''$ est un parallélogramme d'après **(C1)**, donc il est convexe et les points A et D'' sont dans le même demi-plan de frontière (BC). Les demi-droites $]CD)$ et $]CD'')$ seront confondues (en effet $]CD) =]CD'') = (CD) \cap \mathcal{P}_A$), et puisque $AB = CD = CD''$, on déduit $D = D''$. ■

Toutes les remarques précédentes montrent qu'il vaut mieux ne pas dissimuler le cas des quadrilatères croisés et que le partage d'un plan par une droite joue un rôle important dès l'étude rigoureuse de certaines figures très simples. Je viens encore de m'en apercevoir il y a une semaine lorsqu'une majorité de mes étudiants préparant le CAPES ne trouvait à priori aucune erreur dans l'énoncé **(C3')** où j'oubliais sciemment la dernière condition. C'est en les écoutant et en voyant leur étonnement à devoir envisager des quadrilatères croisés que j'ai décidé de construire le petit problème de réflexion sur les polygones et les isométries de la Section 4.

Ces remarques montrent aussi qu'il est utile de connaître et d'utiliser le Théorème 3 de partage du plan par une droite pour analyser certaines figures. Malgré un cours où l'on parlait de ce partage deux mois auparavant, aucun étudiant n'a pu me montrer clairement pourquoi la bissectrice d'un angle d'un triangle coupait le côté opposé. Je proposerai donc aussi cette activité à la Section 3.

2 Convexité des demi-plans

Nous rappelons ici des propriétés importantes vérifiées par les demi-plans et que l'on peut démontrer en Lycée en se plaçant dans un repère pour lequel une équation du demi-plan est $x > 0$. Pour utiliser des résultats classiques sur les enveloppes convexes, je préfère néanmoins situer cette partie et les suivantes au niveau post bac où l'on dispose de la notion d'application affine.

Je détaillerai la preuve du Théorème 3 pour que l'article soit profitable à tous les candidats au CAPES et pour comprendre exactement d'où proviennent les Théorèmes qu'on utilisera aux Sections 3 et 4.

On sait qu'une application est affine si et seulement si elle conserve les barycentres. Cette propriété permet de déduire les Théorèmes de convexité suivants :

Théorème 1 *L'image (resp. l'image réciproque) d'un convexe par une application affine est encore un convexe.*

Théorème 2 *L'image de l'enveloppe convexe d'une partie par une application affine est égale à l'enveloppe convexe de l'image de cette partie.*

Exemple — Dans le plan affine, l'intérieur (bord compris) d'un carré est l'enveloppe convexe de ses 4 sommets. Une application affine f du plan dans lui-même transforme deux droites parallèles en deux sous-espaces affines (ici des droites ou des points) parallèles, de sorte que f transforme l'intérieur du carré en l'intérieur d'un parallélogramme « au sens large », i.e. éventuellement aplati (c'est un segment) ou réduit à un point.

Remarque — Le Théorème 2 ne se généralise malheureusement pas aux images réciproques. S'il est facile de voir que $\mathrm{Conv}\left(f^{-1}(\mathcal{A})\right) \subset f^{-1}(\mathrm{Conv}(\mathcal{A}))$, le contre-exemple suivant montre que l'on n'a pas l'égalité en général. Dans le plan, notons p la projection affine sur une droite D parallèlement à une droite Δ, notons $\mathcal{A}$ la partie formée de deux points A, B situés de part et d'autre de D, et M l'intersection de (AB) et D. La partie $p^{-1}(\mathrm{Conv}(\mathcal{A})) = p^{-1}(\{M\})$ contient strictement $\mathrm{Conv}\left(p^{-1}(\mathcal{A})\right) = \emptyset$.

Théorème 3 *Soient E un espace affine de dimension n, H un hyperplan d'équation :*

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$$

dans un repère de E, et $\mathcal{P}_+$ (resp. $\mathcal{P}_-$) le demi-espace ouvert d'équation $a_1x_1 + ... + a_nx_n > c$ (resp. $a_1x_1 + ... + a_nx_n < c$).

1) $\mathcal{P}_+$ (resp. $\mathcal{P}_-$) est convexe.

2) Si $M \in \mathcal{P}_+$ et $N \in \mathcal{P}_-$, alors le segment $[MN]$ coupe la frontière H en un point et un seul.

3) Si $M \in \mathcal{P}_+$ alors toute droite faiblement parallèle à H passant par M est incluse dans $\mathcal{P}_+$.

4) Si $M \in H$ et $N \in \mathcal{P}_+$, alors la demi-droite $]MN)$ est incluse dans $\mathcal{P}_+$.

Preuve — La FIG. 2 visualise ces propriétés de convexité.

1) Le demi-espace $\mathcal{P}_+$ est convexe puisque c'est l'image réciproque $f^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ du convexe $\mathbb{R}_+^*$ par l'application affine $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = a_1x_1 + ... + a_nx_n - c$ lorsque $(x_1, ..., x_n)$ représentent les coordonnées du point M.

2) Le segment $[MN]$ est l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(M, N)$ de la paire $\{M, N\}$, et :

$$f([MN]) = f(\mathrm{Conv}(M, N)) = \mathrm{Conv}(f(M), f(N)) = [f(M)\, f(N)]$$

d'après le Théorème 2. Par hypothèse $0 \in [f(M)\, f(N)]$ donc il existera un point P appartenant à $H \cap [MN]$. La restriction g de f à la droite affine (MN) est une bijection affine puisque $\dim \mathrm{Ker}\, L(g) = \dim \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{MN}\right) - \dim \mathrm{Im}\, L(g) = 0$ (où $L(g)$ désigne la partie linéaire de g), et par conséquent $(MN) \cap g^{-1}(0) = \{P\}$.

3) Si la droite D passant par M et parallèle à H n'était pas incluse dans $\mathcal{P}_+$, elle couperait nécessairement la frontière H. Comme D est faiblement parallèle à H, cela entraînerait $D \subset H$ donc $M \in H$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4) Si $T \in]MN)$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\overrightarrow{MT} = \lambda \overrightarrow{MN}$. Comme f est affine, on en déduit $f(T) - f(M) = \lambda (f(N) - f(M))$ d'où $f(T) = \lambda f(N) > 0$. ■

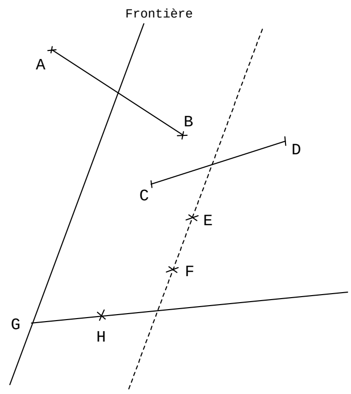


Fig. 2

Remarque — On peut montrer que l'intersection $[MN] \cap H$ n'est pas vide dans le 2) du Théorème précédent en notant que H (resp. $\mathcal{P}_-$) est la frontière (resp. l'extérieur) de $\mathcal{P}_+$ au sens topologique du terme, et en appliquant le Théorème du passage des douanes ([2] Théorème T.2, X, 3.1 : Si A est une partie d'un espace topologique, si a appartient à l'intérieur de A et si b appartient à l'extérieur de A, tout chemin continu d'extrémités a et b coupe la frontière de A en au moins un point). Adapté à notre configuration, ce Théorème se démontre par l'absurde en utilisant la connexité de l'intervalle $[MN]$. Précisément, si $[MN]$ ne coupait pas la frontière H, alors $[MN]$ serait réunion disjointe de ses deux ouverts non vides $[MN] \cap \mathcal{P}_+$ et $[MN] \cap \mathcal{P}_-$, en contradiction flagrante avec la connexité de $[MN]$.

3 Une activité sur les bissectrices

Plaçons-nous maintenant dans un plan affine euclidien.

Activité n°1 : On considère un triangle non aplati ABC et l'on note a, b, c les longueurs des côtés BC, CA et AB.

1) Montrer que la bissectrice intérieure D_A issue du sommet A du triangle ABC coupe le segment $[BC]$ en un point I_A qui vérifie l'égalité vectorielle

$$b\overrightarrow{I_AB} + c\overrightarrow{I_AC} = \overrightarrow{0}. \quad (1)$$

2) En déduire que les trois bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point I de coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère affine (A, B, C). Expliquer aussi pourquoi I est à l'intérieur du triangle.

3) a) Montrer que la bissectrice extérieure D'_A du triangle ABC issue de A coupe la droite (BC) si et seulement si le triangle ABC n'est pas isocèle en A.

b) Dans cette question on suppose que le triangle ABC n'est pas isocèle en A. Montrer que la bissectrice extérieure D'_A coupe la droite (BC) en un point J_A situé à l'extérieur du segment $[BC]$ et que

$$b\overrightarrow{J_AB} - c\overrightarrow{J_AC} = \overrightarrow{0}. \quad (2)$$

4) Prouver que la bissectrice intérieure en A et les bissectrices extérieures issues de B et C du triangle ABC se coupent en un point J barycentre de $A(-a)$, $B(b)$, $C(c)$.

5) Soit ABC un triangle quelconque. Déduire de ce qui précède que les pieds des bissectrices issues de A du triangle ABC sont le(s) point(s) de la droite (BC) caractérisés par la relation

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \quad (3)$$

et que, si ABC n'est pas isocèle en A, les pieds I_A et J_A des bissectrices issues de A coupent harmoniquement le segment $[BC]$.

6) Quel est le lieu $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité (3) ?

Solution — 1) • Montrons que D_A coupe $[BC]$: Par définition, D_A est l'axe de l'unique réflexion s échangeant les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. Notons $s(B) = B' \in [AC)$. La droite D_A partage le plan en deux demi-plans $\mathcal{P}_B$ (contenant B) et $\mathcal{P}_{B'}$ (contenant B'). Comme $A \in D_A$, $B' \in \mathcal{P}_{B'}$ et $C \in [AB') \setminus \{A\}$, on déduit $C \in \mathcal{P}_{B'}$. Puisque $C \in \mathcal{P}_{B'}$ et $B \in \mathcal{P}_B$, le segment $[BC]$ coupe la droite-frontière D_A en un point I_A (cf. Théorème 3).

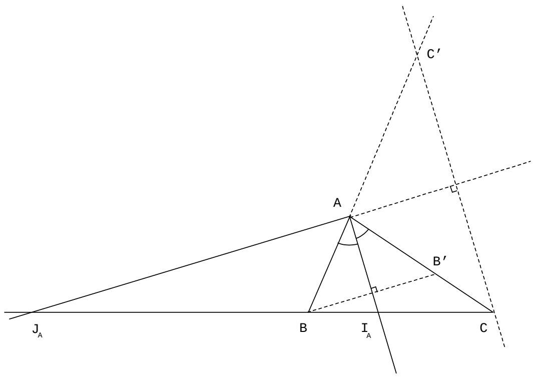


Fig. 3

• Preuve de (1) : La bissectrice extérieure D'_A issue de A est perpendiculaire à D_A. Le symétrique C' de C par rapport à D'_A appartient à la demi-droite opposée à $[AB)$ et le Théorème de Thalès permet d'écrire

$$\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = -\frac{AB}{AC'} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{c}{b}. \quad (*)$$

Remarque — Cette preuve convient dès que l'on sait que le point I_A existe, et son avantage est de montrer facilement que le rapport $\overline{I_AB}/\overline{I_AC}$ est négatif, et donc que $I_A \in [BC]$, sans avoir à utiliser des demi-plans comme on l'a fait plus haut. Il existe d'autres preuves de (1) qui nécessitent d'avoir montré au préalable que I_A existe et appartient à $[BC]$.

2) Soit I le point de coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère (A, B, C). La question 1) et l'associativité du barycentre montrent que le point I est barycentre de $A(a), I_A(b+c)$. Ainsi $I \in (AI_A)$. De la même façon, $I \in (BI_B)$ et $I \in (CI_C)$, donc $I \in D_A \cap D_B \cap D_C$. Comme deux bissectrices intérieures d'un triangle ne sont jamais confondues (en effet, si s_D désigne la réflexion s par rapport à D, on a $s_{D_A}((AB)) = (AC)$ et $s_{D_B}((AB)) = (BC)$. L'égalité $D_A = D_B$ entraîne $(AC) = (BC)$ et le triangle ABC est aplati, ce qui est contraire à l'hypothèse), on déduit $D_A \cap D_B \cap D_C = \{I\}$.

3.a) Il suffit de voir que D_A est perpendiculaire à (BC) si et seulement si D'_A est parallèle à (BC), et d'appliquer le Lemme suivant :

Lemme — Le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si, la bissectrice intérieure D_A en A est perpendiculaire à (BC).

Preuve du Lemme — ($\Rightarrow$) Le symétrique B' de B par rapport à D_A est un point de $[AC)$ tel que $AB' = AB = AC$, donc $B' = C$ et D_A est la médiatrice de $[BC]$.
($\Leftarrow$) Le symétrique B' de B par rapport à D_A est un point de $[AC)$ et appartient à la droite (BC) puisque celle-ci est perpendiculaire à D_A. Donc $B' = C$ et ABC est isocèle en A.

3.b) • Montrons d'abord que $J_A \notin [BC]$. La bissectrice D'_A est l'axe de l'unique réflexion s échangeant les demi-droites $[AB)$ et $-[AC)$. Notons $s(B) = B'' \in -[AC)$. La bissectrice D'_A partage le plan en deux demi-plans ouverts $\mathcal{P}_B$ (contenant B) et $\mathcal{P}_{B''}$ (contenant B''). De $A \in D'_A$, $B'' \in \mathcal{P}_{B''}$ et $A \in [B''C) \setminus \{C\}$, on déduit $C \in \mathcal{P}_B$. Le demi-plan $\mathcal{P}_B$ contient B et C, donc contiendra le segment $[BC]$ (convexité des demi-plans) et $J_A \in D'_A \setminus [BC]$.

• Montrons (2) – Soit B' le symétrique de B par rapport à D_A. Comme par hypothèse le point B' appartient à $[AC)$, le Théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{J_A B}}{\overline{J_A C}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}. \quad (*)$$

4) Soit J le barycentre de $A(-a)$, $B(b)$, $C(c)$. L'associativité du barycentre montre que J est à la fois barycentre de $A(-a), I_A(b+c)$, de $B(b), J_B(-a+c)$ et de $C(c), J_C(-a+b)$, donc appartient à la bissectrice intérieure (AI_A) et aux bissectrices extérieures (BJ_B) et (CJ_C). On a montré l'inclusion $\{J\} \subset (AI_A) \cap (BJ_B) \cap (CJ_C)$. En fait on a l'égalité car les deux bissectrices extérieures (BJ_B) et (CJ_C) ne peuvent être confondues pour les mêmes raisons qu'au 2).

5) Si ABC n'est pas isocèle en A, les points I_A et J_A vérifient (3) et l'on sait d'autre part que cette relation est vérifiée par exactement deux points distincts. Si ABC est isocèle en A, la relation (3) équivaut à $MB = MC$ et $M \in (BC)$, soit à M milieu de $[BC]$. Dans ce cas seule la bissectrice intérieure en A coupe (BC) en M, et les droites D'_A et (BC) se coupent à l'infini. Si ABC n'est pas isocèle en A, les points I_A et J_A sont distincts et :

$$\frac{\overline{I_A B}}{\overline{I_A C}} : \frac{\overline{J_A B}}{\overline{J_A C}} = \left(-\frac{c}{b}\right) : \frac{c}{b} = -1$$

de sorte que I_A et J_A coupent harmoniquement le segment $[BC]$.

6) On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow bMB - cMC = 0 \Leftrightarrow b^2MB^2 - c^2MC^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (b\overrightarrow{MB} - c\overrightarrow{MC})(b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ_A}.\overrightarrow{MI_A} = 0 \end{aligned}$$

puisque I_A (resp. J_A) est barycentre de $B(b)$, $C(c)$ (resp. $B(b)$, $C(-c)$). L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc le cercle de diamètre $[I_A J_A]$. Ce cercle centré sur la droite (BC) et passant par A est l'un des trois cercles d'Apollonius du triangle.

Analyse succincte — L'activité se déroule dans un petit groupe de TD de huit étudiants préparant le CAPES. L'exercice n'a été préparé à l'avance que par deux étudiants. L'existence et l'appartenance de I_A au segment $[BC]$ pose un véritable problème puisqu'il faut justifier une « évidence » et que ces questions sont rarement abordées pendant la scolarité. Quelques tentatives ont lieu pour exploiter les angles égaux formés par la bissectrice et ainsi montrer que $I_A \in [BC]$, mais le problème, qui revient alors à prouver que $BI_A < BC$, n'est pas résolu.

Par contre une preuve de (1) est trouvée et exposée au tableau. Dans cette preuve, on admet l'existence de I_A sur $[BC]$, puis on utilise les relations :

$$\frac{BI_A}{\sin(\widehat{A}/2)} = \frac{AB}{\sin \widehat{BI_AA}} \quad \text{et} \quad \frac{CI_A}{\sin(\widehat{A}/2)} = \frac{AC}{\sin(\pi - \widehat{BI_AA})}$$

pour obtenir :

$$\frac{BI_A}{AB} = \frac{CI_A}{AC}.$$

Je donne ensuite la preuve de l'appartenance de I_A à $[BC]$, et la preuve de (1) utilisant Thalès. L'activité est l'occasion d'insister sur la définition non angulaire d'une bissectrice intérieure qui la présente comme « l'axe de l'unique réflexion échangeant les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ ». Cette caractérisation revient d'ailleurs à l'énoncé très simple suivant : la droite D_A passant par A est la bissectrice intérieure issue de A si et seulement si le symétrique de B par rapport à D_A appartient à la demi-droite $[AC)$.

On remarque finalement que la preuve de (1) utilisant Thalès nécessite seulement de savoir que le point I_A existe, puisque les égalités $(*)$ prouvent aussi que $I_A \in [BC]$. Le reste de l'activité ne pose pas de problème particulier, et le raisonnement ré-utilisant des demi-plans à la question 3.b) est retrouvé et rédigé par une autre étudiante.

Prolongement — Les cercles d'Apollonius et le point de Lemoine sont un prolongement possible à l'Activité n°1. On pourra se référer à l'excellent article de Jean De Biasi [1].

4 Polygones et isométries

Activité n°2 — Un polygone est une ligne brisée fermée. Se donner un polygone revient donc à se donner une suite finie $(A_0, ..., A_{n-1})$ de points du plan définissant les n segments $[A_0A_1]$, ..., $[A_{n-1}A_0]$. Les points A_i (resp. les segments $[A_iA_{i+1}]$) sont appelés les sommets (resp. les côtés ou arêtes) du polygone $A_0...A_{n-1}$. Nous noterons commodément $A_m = A_r$ dès que m est un entier relatif congru à r modulo n, et nous supposerons raisonnablement que trois sommets consécutifs du polygone ne sont jamais alignés, autrement dit que les trois points A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ne sont pas alignés quel que soit l'entier i. A un polygone on peut toujours associer les objets suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{A_0, ..., A_{n-1}\} \text{ l'ensemble des sommets,} \\
\mathcal{C} &= \mathrm{Conv}\,(A_0, ..., A_{n-1}) \text{ l'enveloppe convexe des sommets,} \\
\mathcal{B} &= [A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0] \text{ la bordure,} \\
\mathcal{A} &= \{[A_0A_1]\,, ..., [A_{n-1}A_0]\} \text{ l'ensemble constitué des arêtes (ou côtés) } [A_iA_{i+1}]\,.
\end{aligned}$$

On notera qu'avec ces notations, le polygone $A_0...A_{n-1}$ est l'ensemble $\mathcal{B}$ ou encore l'ensemble des arêtes $\mathcal{A}$, suivant qu'on l'imagine comme un ensemble de points du plan ou comme un ensemble de segments. Si X désigne une partie de E_2 (ou de $\mathcal{P}(E_2)$), on notera $\mathrm{Is}\,(X)$ le groupe des isométries f du plan E_2 laissant X globalement invariante, i.e. telles que $f\,(X) = X$.

1) Montrer les inclusions $\mathrm{Is}\,(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Is}\,(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Is}\,(\mathcal{C})$. Ces inclusions assurées sans aucune condition sur les points A_i, ont un conséquence importante : dans la pratique de la recherche des isométries laissant un polygone invariant, il est commode de définir un polygone comme un ensemble d'arêtes, i.e. en utilisant l'ensemble $\mathcal{A}$. Cette définition est raisonnable et l'on vient de voir que si une isométrie f laisse invariant l'ensemble des arêtes, alors elle laisse invariant l'ensemble des sommets. Cette conservation des sommets permet d'obtenir de nombreuses propriétés de f.

2) Montrer que $\text{Is}(\mathcal{S})$ n'est en général inclus ni dans $\text{Is}(\mathcal{A})$, ni dans $\text{Is}(\mathcal{B})$.

3) Donner un contre-exemple montrant que $\text{Is}(\mathcal{C})$ n'est pas en général inclus dans l'un quelconque des ensembles $\text{Is}(\mathcal{S})$, $\text{Is}(\mathcal{B})$ ou $\text{Is}(\mathcal{A})$.

4) Montrer que $\text{Is}(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(\mathcal{B}) \subset \text{Is}(\mathcal{C})$.

5) Donner un contre-exemple permettant d'affirmer qu'en général $\text{Is}(\mathcal{B})$ n'est inclus ni dans $\text{Is}(\mathcal{S})$, ni dans $\text{Is}(\mathcal{A})$.

6) On fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

> (H) : « Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, il existe une droite D passant par A_j et telle que l'un des demi-plans ouverts de frontière D contienne tous les points A_i obtenus pour $i \neq j$ ».

a) On dit que le polygone $A_0...A_{n-1}$ est convexe si, pour tout indice i, les points $A_0, ..., A_{n-1}$ appartiennent tous à un même demi-plan H_i de frontière (A_iA_{i+1}). Un polygone convexe satisfait-il l'hypothèse (H) ?

b) Dessiner rapidement un polygone non convexe vérifiant l'hypothèse (H) puis un polygone non convexe qui ne vérifie pas l'hypothèse (H).

c) On dit que le polygone $A_0...A_{n-1}$ est régulier si tous ses côtés ont même longueur et ses sommets sont cocycliques. Démontrer qu'un polygone régulier vérifie l'hypothèse (H).

d) Montrer que sous l'hypothèse (H) on a $\text{Is}(\mathcal{S}) = \text{Is}(\mathcal{C})$.

e) Montrer de même que si (H) est vraie, alors $\text{Is}(\mathcal{B}) \subset \text{Is}(\mathcal{S})$.

On retiendra que, sous l'hypothèse (H), les deux inclusions et l'égalité suivantes sont vraies :

$$\text{Is}(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(\mathcal{S})\,; \quad \text{Is}(\mathcal{B}) \subset \text{Is}(\mathcal{S})\,; \quad \text{Is}(\mathcal{C}) = \text{Is}(\mathcal{S})\,.$$

Ces inclusions permettent de simplifier la recherche des isométries laissant l'ensemble $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) invariant. On sait déjà qu'il faut chercher ces isométries parmi les isométries laissant les sommets globalement invariants, ce qui est nettement plus facile et permet d'éliminer un nombre important de cas. Ensuite on reprend chacune des isométries laissant $\mathcal{S}$ invariant et l'on vérifie si elle laisse encore $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) invariant.

Solution — 1) • Montrons que $\text{Is}(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(\mathcal{S})$. Si $f \in \text{Is}(\mathcal{A})$, f est affine bijective donc transforme le segment $[A_iA_{i+1}]$ en $[f(A_i)\,f(A_{i+1})]$. Par hypothèse $f([A_iA_{i+1}]) = [f(A_i)\,f(A_{i+1})]$ est une arête $[A_jA_{j+1}]$, donc $f(A_i) = A_j$ ou A_j, et l'on a montré l'inclusion $f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est un ensemble fini (de cardinal inférieur ou égal à n), on en déduit $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ et l'on a prouvé l'inclusion $\text{Is}(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(\mathcal{S})$.

• Montrons que $\text{Is}(\mathcal{S}) \subset \text{Is}(\mathcal{C})$. Toute application $f \in \text{Is}(\mathcal{S})$ est affine et l'on sait que l'image directe d'une enveloppe convexe d'une partie par une application affine est l'enveloppe convexe des images de cette partie. On a donc :

$$f(\mathcal{C}) = f(\text{Conv}(A_0, ..., A_{n-1})) = \text{Conv}(f(A_0), ..., f(A_{n-1})) = \text{Conv}(A_0, ..., A_{n-1}) = \mathcal{C}$$

et la seconde inclusion est démontrée.

2) La tête de chat $OA_0...A_5$ de la FIG. 4 nous offre un bon contre-exemple. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ conserve les sommets mais ne conserve ni les arêtes, ni la bordure $\mathcal{B} = [A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0]$. Un autre contre-exemple est dessiné à la FIG. 5.

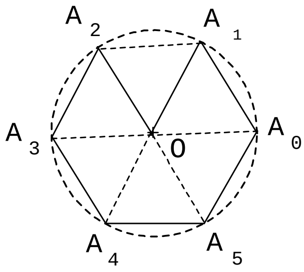


Fig. 4

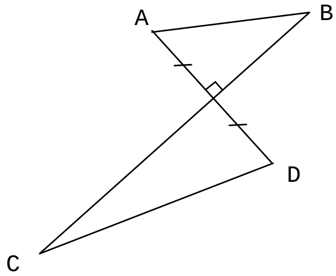


Fig. 5

3) Prenons $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, M\}$ où $ABCD$ est un carré dans le plan et M un point à l'intérieur de celui-ci mais différent de son centre (FIG. 6). Si f est la rotation d'angle droit et de centre l'intersection des diagonales du carré, on a $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ sans avoir $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. On aura aussi $f(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$ et $f(\mathcal{B}) \neq \mathcal{B}$.

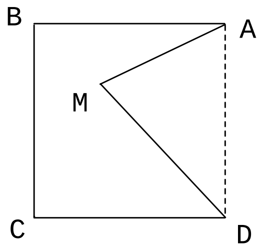


Fig. 6

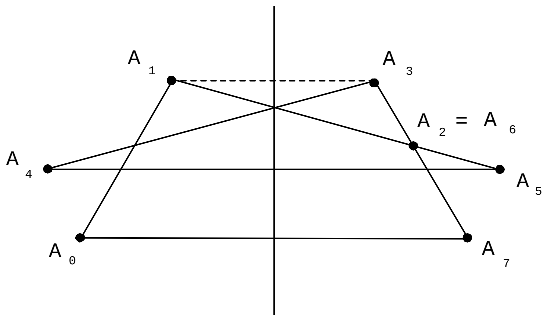


Fig. 7

4) • L'inclusion $\text{Is}(\mathcal{A}) \subset \text{Is}(\mathcal{B})$ est évidente car si f conserve les arêtes, elle conserve les points appartenant à ces arêtes.

• Montrons que $\text{Is}(\mathcal{B}) \subset \text{Is}(\mathcal{C})$. On va utiliser le résultat (R) suivant qui provient de la propriété d'associativité du barycentre : $\text{Conv}(A_0, ..., A_{n-1}) = \text{Conv}([A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0])$. Si l'isométrie f conserve $\mathcal{B}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(\text{Conv}(A_0, ..., A_{n-1})) &= f(\text{Conv}([A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0])) \\ &= \text{Conv}(f([A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0])) \text{ car } f \text{ est affine,} \\ &= \text{Conv}([A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0]) \text{ car } f \in \text{Is}(\mathcal{B}), \\ &= \text{Conv}(A_0, ..., A_{n-1}) \text{ d'après } (R). \end{aligned}$$

Donc $f \in \text{Is}(\mathcal{C})$.

5) Un contre-exemple est dessiné à la FIG 7.

6.a) Si le polygone $A_0...A_{n-1}$ est convexe et si l'indice j est donné, la droite D parallèle à $(A_{j-1}A_{j+1})$ et passant par A_j vérifie la condition (H) (FIG. 8). Un polygone convexe vérifie donc l'hypothèse (H).

6.b)

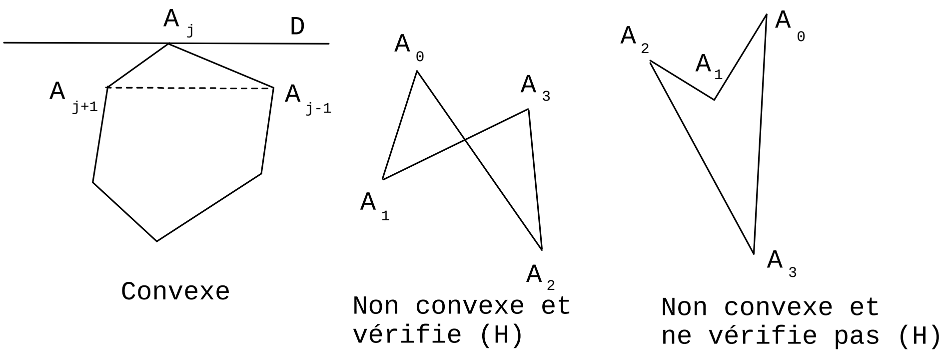


Fig. 8

6.c) La droite D passant par A_j et perpendiculaire au rayon OA_j du cercle circonscrit au polygone $A_0 ... A_{n-1}$ vérifiera la condition (H).

6.d) Compte tenu de la question 1), il suffit de montrer l'inclusion $\mathrm{Is}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Is}(\mathcal{S})$. Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathcal{C})$. Si f ne conservait pas les sommets A_0, ..., A_{n-1}, il existerait $j \in \mathbb{N}_n$ tel que $A_j \notin f(\mathcal{S})$. Soit D une droite passant par A_j et vérifiant la condition (H). Soit O un point de D et $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur de D. Introduisons un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan tel que toutes les ordonnées des points A_i ($i \in \mathbb{N}_n$) soient négatives. Si M est un point du plan, notons $(x(M), y(M))$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. On a $y(A_j) = 0$ et $y(A_i) < 0$ dès que $i \neq j$.

Montrons que $\mathcal{C} \setminus \{A_j\}$ est inclus dans le demi-plan $P_D = \{(x, y) \ / y < 0\}$. Si $M \in \mathcal{C} \setminus \{A_j\}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

où tous les coefficients α_i sont positifs, où $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1$, et où les coefficients α_i tels que $i \neq j$ ne sont pas simultanément nuls. Par projection, on obtient $y(M) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y(A_i)$. Comme $y(A_j) = 0$ et $y(A_i) < 0$ dès que $i \neq j$, cela entraîne bien $y(M) < 0$.

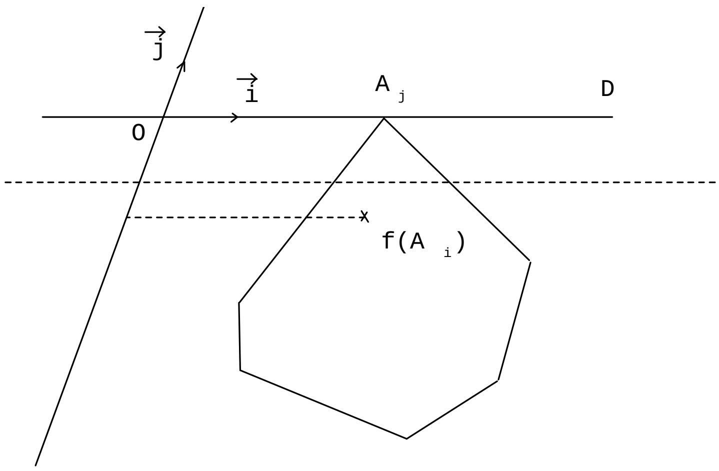


Fig. 9

On sait que $A_i \in \mathcal{C}$ et $f(A_i) \neq A_j$. Comme $f \in \mathrm{Is}(\mathcal{C})$, cela donne $f(A_i) \in \mathcal{C} \setminus \{A_j\} \subset P_D$ pour tout i. On peut donc poser $m = \mathrm{Max}\,(y(f(A_i)) \ / i \in \mathbb{N}_n) < 0$ pour écrire :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad y(f(A_i)) \leq m.$$

Le demi-plan E_- d'équation $y \leq m$ est convexe et contient tous les points $f(A_i)$, donc contiendra l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(f(A_0), ..., f(A_{n-1}))$ de ces points, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Conv}(f(A_0), ..., f(A_{n-1})) \subset E_-.$$

Alors :

$$\mathcal{C} = f(\mathcal{C}) = f(\mathrm{Conv}(A_0, ..., A_{n-1})) = \mathrm{Conv}(f(A_0), ..., f(A_{n-1})) \subset E_-$$

donc $\mathcal{C} \subset E_-$. C'est absurde puisque $A_j \notin E_-$.

6.e) Le raisonnement du 6.d peut être utilisé pour prouver l'inclusion $\mathrm{Is}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{Is}(\mathcal{S})$. En effet, avec les notations de la question 6.d, on aura cette fois-ci :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = f(\mathcal{B}) &= f([A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_0]) \\ &= f([A_0A_1]) \cup ... \cup f([A_{n-1}A_0]) \\ &= [f(A_0)\, f(A_1)] \cup ... \cup [f(A_{n-1})\, f(A_0)] \end{aligned}$$

Ici encore $f(A_i)$ appartient à E_- pour tout i, donc $[f(A_i)\, f(A_{i+1})] \subset E_-$ pour tout i et :

$$\mathcal{B} = [f(A_0)\, f(A_1)] \cup ... \cup [f(A_{n-1})\, f(A_0)] \subset E_-.$$

C'est absurde puisque $A_j \notin E_-$.

Analyse succincte — Les définitions de $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ et l'utilisation de polygones croisés dans les exemples font bien réfléchir les étudiants. Cette activité permet d'utiliser les propriétés des applications affines bijectives, et des isométries.

La relation (R) et l'utilisation des enveloppes convexes sont bien mises en oeuvre par quelques étudiants et les démonstrations exposées au tableau sont une base pour la discussion. J'ai présenté la solution de la question 6.d), plus difficile, après une courte période de recherche.

References

[1] J. De Biasi, Inversion Triangulaire, APMEP **408**, pp. 9-18, 1997.

[2] L. Schwarz, Analyse 2ème partie, Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Hermann, 1970.